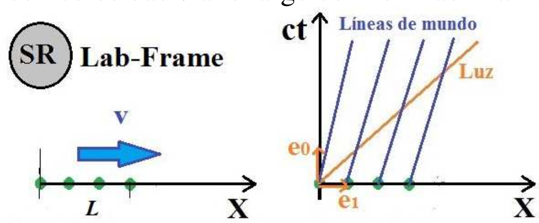
V-50 (1 h , 20min) 20-Enero 2019 Resumen de Miguel Cañizares	**Tensor Energía-Momento** **Apéndice matemático**

Recordatorio (V-26) con **Esp-Tmp Minkowski (1+1)D**, (para simplificar) con métrica: $ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2$
Una partícula de masa m, en movimiento con v, siendo $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ tiene momento espacial $\vec{p}$ y energía E:

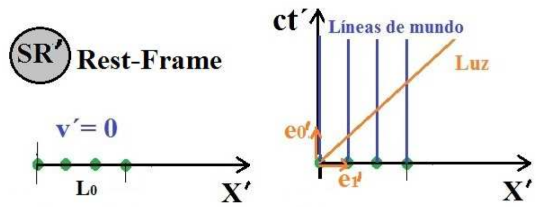
Cuadrimomento $\underline{p} = m\underline{u} = m\frac{cdt}{d\tau}e_0 + m\frac{dx}{d\tau}e_1 = mc\frac{dt}{d\tau}e_0 + m\frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau}e_1$ (V-19): $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$ y $\frac{dx}{dt} = v$ espacial
Lo expresemos: $\underline{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{m\gamma c}\ \boldsymbol{e_0} + \boldsymbol{m\gamma v}\ \boldsymbol{e_1}$ siendo $\vec{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{m\gamma v}\ \boldsymbol{e_1}$ el momento espacial

La energía E la obtenemos a partir del Killing temporal $\xi^{tmp} = e_0$, recordando (V-26) que $\underline{p} \cdot \underline{\xi}^{tmp} = -\frac{E}{c}$
$(m\gamma c\ e_0 + m\gamma v\ e_1) \cdot e_0 = -m\gamma c = -\frac{E}{c}$ luego la energía es: $\boldsymbol{E = m\gamma c^2}$
Podemos poner el cuadrimomento de forma que su componente temporal está relacionalda con la energía y su componente espacial es el momento ordinario: $\underline{\boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{e_0} + \boldsymbol{m\gamma v}\ \boldsymbol{e_1}$

Condiciones previas para la construcción del tensor Energía-Momento
Suponemos conjunto de N partículas, de masa total Nm, moviéndose con velocidad v a lo largo de X en Lab-Frame



Desde el SR Lab-Frame vemos las masas moviéndose y ocupando una longitud L.
La densidad de energía será: $\varepsilon = \frac{Nm\gamma c^2}{L}$
La densidad de momento: $\pi = \frac{Nm\gamma v}{L}$
En la figura desde el SR espacial (eje X) y las líneas de mundo en una gráfica de Minkowski con base **(e_0, e_1).**
La densidad de momento se relaciona con la densidad de energía: $\pi = \frac{Nm\gamma v}{L} = \frac{Nm\gamma c^2}{L} \cdot \frac{v}{c^2}$ → $\boldsymbol{\pi = \frac{\varepsilon}{c^2} \cdot v}$



Desde el SR´ (Rest-Frame) las masas en reposo ocupan mayor longitud $L_0 = \gamma \cdot L$
La densidad de energía (γ=1) será: $\varepsilon_0 = \frac{Nmc^2}{L_0}$
La densidad de momento (v = 0) será: $\pi_0 = 0$
En la figura se representa el SR´ espacial (eje X´) y las líneas de mundo en gráfica de Minkowski con base "primada" **(e_0', e_1').**

La densidad de energía ε, vistas desde el Lab-Frame, y la vista desde el Rest-Frame ε_0, debido a la contracción de Lorentz ($L = L_0/\gamma$), deben estar relacionadas:

$$\varepsilon = \frac{Nm\gamma c^2}{L} = \frac{Nm\gamma^2 c^2}{L_0} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \gamma^2}$$

Estrategia para construir un objeto matemético tensorial en el Ep-Tmp, asociado a la energía: lo postulamos con una sola componente desde el Rest-Frame y lo transformamos para el Lab-Frame (transformación de Lorentz), comprobando que tiene que cumplir la relación anterior: $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \gamma$

Un primer intento de tensor de 1º orden (vector): $\underline{T}_{RF} = \varepsilon_0 \boldsymbol{e_0'}$ conduce al aplicar (V-18): $\boldsymbol{e_0'} = \gamma(\boldsymbol{e_0} + \beta \boldsymbol{e_1})$ un tensor $\underline{T} = \varepsilon_0\gamma\boldsymbol{e_0} + \varepsilon_0\gamma\beta\boldsymbol{e_1}$ donde no aparece el factor γ^2 en la primera componente como debería.

Para comportamiento adecuado, bajo cambio de SR, postulamos tensor de 2º orden $T^{\alpha\beta}[e_\alpha \otimes e_\beta]$ (α y β = 0, 1) que desde la Rest-Frame sólo tiene componente $T^{00} = \varepsilon_0$

$$\mathbb{T} = \varepsilon_0 \left[e_0' \otimes e_0'\right]$$

Veamos cómo se transforma en el Lab-Frame: $\underline{T} = \varepsilon_0\ \gamma^2(\boldsymbol{e_0} + \beta\boldsymbol{e_1}) \otimes (\boldsymbol{e_0} + \beta\boldsymbol{e_1})$

$$\mathbb{T} = \boldsymbol{\varepsilon_0\ \gamma^2}[\boldsymbol{e_0} \otimes \boldsymbol{e_0}] + \boldsymbol{\varepsilon_0\ \gamma^2\beta}[\boldsymbol{e_0} \otimes \boldsymbol{e_1}] + \boldsymbol{\varepsilon_0\ \gamma^2\beta}[\boldsymbol{e_1} \otimes \boldsymbol{e_0}] + \boldsymbol{\varepsilon_0\ \gamma^2\beta^2}[\boldsymbol{e_1} \otimes \boldsymbol{e_1}]$$

Vemos que la componente $T^{00} = \varepsilon_0\gamma^2$ cumple la condición buscada para la transformación de la densidad de energía. Las componentes $T^{01} = T^{10} = \varepsilon_0\gamma^2\beta$ y $T^{11} = \varepsilon_0\gamma^2\beta^2$ tenemos que ver su significado. Lo veremos viendo si tiene sentido la ecuación de continuidad.

Recordemos cómo era la ecuación de continuidad para un tensor de 1º orden, (V-49):

$$\frac{\partial c\rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho v^x}{\partial x}+\frac{\partial \rho v^y}{\partial y}+\frac{\partial \rho v^z}{\partial z}=0 \quad \textit{Conserv local de la densidad de carga } \rho$$

La divergencia de tensor de 2º orden es un vector, o tensor de 1º orden: $\vec{\nabla}\cdot\mathbb{T}=\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k}\boldsymbol{e_i}$ (*Ver apéndice Mat).

La ecuación de continuidad será de la forma: $\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k}\boldsymbol{e_i}=0$ (incluyendo la componente temporal $x^0 = t$)

En nuestro caso, Esp-Tmp Minkowski (1+1)D el índice i puede tomar dos valores, $i=0$, $i=1$, luego tendremos dos componentes de la divergencia y, por lo tanto, podremos plantear dos ecuaciones de continuidad:

$$\frac{\partial T^{0k}}{\partial x^k}\boldsymbol{e_0}=0 \;\rightarrow\; \frac{\partial T^{00}}{\partial x^0}+\frac{\partial T^{01}}{\partial x^1}=0 \;\rightarrow\; \frac{\partial \varepsilon_0\,\gamma^2}{\partial ct}+\frac{\partial \varepsilon_0\,\gamma^2\beta}{\partial x}=0 \;\rightarrow\; \frac{1}{c}\frac{\partial \varepsilon_0\,\gamma^2}{\partial t}+\frac{1}{c}\frac{\partial \varepsilon_0\,\gamma^2 v}{\partial x}=0 \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{\partial T^{1k}}{\partial x^k}\boldsymbol{e_1}=0 \;\rightarrow\; \frac{\partial T^{10}}{\partial x^0}+\frac{\partial T^{11}}{\partial x^1}=0 \;\rightarrow\; \frac{\partial \varepsilon_0\,\gamma^2\beta}{\partial ct}+\frac{\partial \varepsilon_0\,\gamma^2\beta^2}{\partial x}=0 \;\rightarrow\; \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varepsilon_0\,\gamma^2 v}{\partial t}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varepsilon_0\,\gamma^2 v^2}{\partial xomento}=0 \qquad \text{(II)}$$

En Lab Frame, la densidad de energía es $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon_0}\cdot\boldsymbol{\gamma^2}$ **y** la densidad de momento $c^2\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\varepsilon v}=\boldsymbol{\varepsilon_0\,\gamma^2 v}$. Las ecuaciones anteriores se pueden poner:

$$\text{(I)} \quad \frac{\partial \varepsilon_0\,\gamma^2}{\partial t}+\frac{\partial \varepsilon_0\,\gamma^2 v}{\partial x}=0 \;\rightarrow\; \boldsymbol{\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial \varepsilon\, v}{\partial x}=0} \qquad \textit{Conserv local densidad de energía } \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\text{(II)} \quad \frac{\partial \varepsilon_0\,\gamma^2 v}{\partial t}+\frac{\partial \varepsilon_0\,\gamma^2 vv}{\partial x}=0 \;\rightarrow\; \boldsymbol{\frac{\partial \pi}{\partial t}+\frac{\partial \pi\, v}{\partial x}=0} \qquad \textit{Conserv local densidad de momento } \boldsymbol{\pi}$$

<u>Conclusiones: se puede construir un tensor de 2º orden de Energía-Momento</u>

Se trata de un **CAMPO TENSORIAL:** en cada punto (ct, x) del Esp-Tmp habrá una dm con un valor de v, β, γ, una densidad de energía y de momento. Las componentes $\boldsymbol{T^{ik}}$ **tienen un valor en cada punto**

$$\mathbb{T}=\boldsymbol{\varepsilon_0\,\gamma^2}[e_0\otimes e_0]+\boldsymbol{\varepsilon_0\,\gamma^2\beta}[e_0\otimes e_1]+\boldsymbol{\varepsilon_0\,\gamma^2\beta}[e_1\otimes e_0]+\boldsymbol{\varepsilon_0\,\gamma^2\beta^2}[e_1\otimes e_1]$$

$$\mathbb{T}=\boldsymbol{\varepsilon}[e_0\otimes e_0]+\boldsymbol{c\pi}[e_0\otimes e_1]+\boldsymbol{c\pi}[e_1\otimes e_0]+\boldsymbol{\pi v}[e_1\otimes e_1]$$

Que cumple ecuaciones de continuidad $\boldsymbol{\partial_k T^{ik}=0}$ **Conservaciones de densidades de energía y momento**

El <u>Campo tensorial Energía-Momento en función de las componentes de la cuadrivelocidad:</u> de

En cada punto del Esp-Tmp hay una Cuadrivelocidad.

$$\underline{u}=\frac{cdt}{d\tau}e_0+\frac{dx}{d\tau}e_1=(c\gamma)\,e_0+(v\gamma)\,e_1 \qquad \begin{cases} u^0u^0=c^2\gamma^2 & \Longrightarrow\; T^{00}=\frac{\varepsilon_0}{c^2}(u^0u^0) \\ u^0u^1=c\gamma^2 v & \Longrightarrow\; T^{01}=T^{10}=\frac{\varepsilon_0}{c^2}(u^0u^1) \\ u^1u^1=\gamma^2v^2 & \Longrightarrow\; T^{11}=\frac{\varepsilon_0}{c^2}(u^1u^1) \end{cases}$$

Podemos poner, sacando factor común $\boldsymbol{\frac{\varepsilon_0}{c^2}=\rho_0}$ que es la <u>densidad de masa local</u> en cada punto del Esp-Tmp (en la Rest-Frame)

$$\mathbb{T}=\boldsymbol{\rho_0}\big[(u^0u^0)[e_0\otimes e_0]+(u^0u^1)[e_0\otimes e_1]+(u^1u^0)[e_1\otimes e_0]+(u^1u^1)[e_1\otimes e_1]\big]$$

$$\boldsymbol{T^{ik}=\rho_0 u^i u^k} \qquad \textit{por linealidad de } \otimes \;\Longrightarrow\; \boldsymbol{\mathbb{T}=\rho_0(\underline{u}\otimes\underline{u})}$$

<u>Se puede generalizar desde Ep-Tmp plna Minkowski (1+1)D a otros curvos como Schwarzschild (1+3)D</u>:

- El tensor de 2º orden *Energía-Momento* tendrá 16 componentes $T^{ik}[e_i\otimes e_k]$ (i y k = 0, 1, 2, 3).
- Habrá cuatro ecuaciones de continuidad, una para la densidad de energía, otras tres para las componentes espaciales de la densidad de momento y, además, se cambiarán las derivadas parciales por la traza de derivadas covariantes, que incluirán símbolos de Christoffel (*Ver apéndice Mat).

Continuación V-50 APÉNDICE MATEMÁTICO

Divergencia cuando la base coordenada varía de un punto a otro (se explica al principio del V-50)

El operador Nabla en un espacio clásico de 3D es: $\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$

Para utilizar el criterio de sumatorio de Einstein y la nomenclatura relativista general, usamos base dual:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}^0 \partial_0 + \vec{e}^1 \partial_1 + \vec{e}^2 \partial_2 + \vec{e}^3 \partial_3 = \vec{e}^\alpha \partial_\alpha$$

Si aplicamos el operador Nabla a un campo vectorial $\vec{F} = F^\beta \vec{e}_\beta$ obtenemos su divergencia (magnitud escalar):

$$div\,\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \vec{e}^\alpha \partial_\alpha (F^\beta \vec{e}_\beta) = \vec{e}^\alpha [(\partial_\alpha F^\beta)\vec{e}_\beta + F^\beta (\partial_\alpha \vec{e}_\beta)] = \vec{e}^\alpha [(\partial_\alpha F^\beta)\vec{e}_\beta + F^\beta \Gamma^{m}_{\alpha\beta} \vec{e}_m] =$$

$$= \partial_\alpha F^\beta (\vec{e}^\alpha \cdot \vec{e}_\beta) + F^\beta \Gamma^{m}_{\alpha\beta} (\vec{e}^\alpha \cdot \vec{e}_m) = \partial_\alpha F^\beta (\delta^\alpha_\beta) + F^\beta \Gamma^{m}_{\alpha\beta} (\delta^\alpha_m)$$

$\delta^\alpha_\beta = 1 \;\; si \;\; \beta = \alpha \; ; \; \delta^\alpha_m = 1 \, si \, m = \alpha \quad \Longrightarrow \quad \boxed{div\,\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \partial_\alpha F^\alpha + F^\beta \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}}$

En un espacio donde no varía la base coordenada (p.ej bse cartesiana) los símbolos de Christoffel son nulos y queda la expresión tradicional de la divergencia: $div\,\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \partial_\alpha F^\alpha$

Según el concepto de derivada covariante: $\frac{\partial \vec{F}}{\partial x^\alpha} = [\nabla_\alpha F^k]\vec{e}_k = [\partial_\alpha F^k + F^m \Gamma^{k}_{\alpha m}]\vec{e}_k$

La derivada covariante tiene tantas componentes como valores pueda tomar el índice K. Vemos que la divergencia tiene la misma forma que aquella componente de la derivada covariante, en la que k = α, que se le llama "traza":

$Traza\,[\nabla_\alpha F^k] = \nabla_\alpha F^\alpha = \partial_\alpha F^\alpha + F^m \Gamma^{\alpha}_{\alpha m} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{div\,\vec{F} = Traza\,[\nabla_\alpha F^k]}$

EJEMPLO: Divergencia de campo vectorial $\vec{A}$ en espacio plano 2D, pero en coordenadas polares.

$x = r \cdot \sin\theta$	Métrica: $ds^2 = dx^2 + dy^2 =$	Símbolos de Christoffel:
$y = r - \cos\theta$	$= dr^2 + r^2 d\theta^2$	$\Gamma^{r}_{\theta\theta} = -r \qquad \Gamma^{\theta}_{\theta r} = \frac{1}{r}$

$$El\ campo\ vectorial,\ expresado\ en\ polares: \quad \vec{A} = A^r \vec{e}_r + A^\theta \vec{e}_\theta$$

$$div\vec{A} = \nabla_\alpha A^\alpha = \partial_\alpha A^\alpha + A^m \Gamma^{\alpha}_{\alpha m}$$

$$div\vec{A} = \partial_r A^r + \partial_\theta A^\theta + A^r \Gamma^{r}_{rr} + A^\theta \Gamma^{r}_{r\theta} + A^r \Gamma^{\theta}_{\theta r} + A^\theta \Gamma^{\theta}_{\theta\theta} = \partial_r A^r + \partial_\theta A^\theta + A^r \Gamma^{\theta}_{\theta r} = \partial_r A^r + \partial_\theta A^\theta + \frac{A^r}{r} \quad \text{(I)}$$

Obsérvese el término "extra" respecto al cálculo habitual de la divergencia con coordenadas cartesianas.

La expresión, que suele aparecer en los libros de la divergencia en polares, no coincide con la anterior, ya que suele hacerse con base normalizada (de módulo unidad). Sin embargo, la base de las coordenadas polares, en principio, no lo está, pues según la métrica: $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = 1$ pero $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = r^2$. Se define una nueva base (con gorrito) que esté normalizada:

$$\hat{e}_r = \vec{e}_r \qquad ya\ normalizada$$

$$\hat{e}_\theta = \frac{1}{r}\vec{e}_\theta \quad \to \quad \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\theta = \frac{1}{r}\vec{e}_\theta \cdot \frac{1}{r}\vec{e}_\theta = \frac{1}{r^2}\vec{e}_\theta \vec{e}_\theta = \frac{1}{r^2} \cdot r^2 = 1$$

El campo vectorial, con la nueva base, será: $\vec{A} = A^r \vec{e}_r + A^\theta \vec{e}_\theta = A^r \hat{e}_r + A^\theta r\, \hat{e}_\theta = a^r \hat{e}_r + a^\theta \hat{e}_\theta$

Las componentes de $\vec{A}$ en la base inicial y en la base normalizada están relacionadas: $A^r = a^r \; ; \; A^\theta = \frac{a^\theta}{r}$

Sustituimos en la expresión (I) de la divergencia, para ponerla en función de las nuevas componentes:

$$div\vec{A} = \partial_r a^r + \frac{1}{r}\partial_\theta a^\theta + \frac{a^r}{r} = \frac{1}{r}[\partial_r (r a^r) + \partial_\theta a^\theta] \quad \text{(II)}$$

Divergencia de un campo tensorial

Cuando se halla la divergencia de un tensor disminuye su rango. Así, cuando se halla la divergencia de un vector (tensor de 1º orden) se obtiene un escalar (tensor de orden cero).
Por lo tanto, cuando se halla la **divergencia de un tensor de 2º orden (matriz) se obtiene un tensor de 1º orden, vector con tantas componentes como filas de la matriz.**

$$\mathbb{T} = T^{ij}[\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j]$$

$$\vec{\nabla} = \vec{e}^1\partial_1 + \vec{e}^2\partial_2 + \vec{e}^3\partial_3 = \vec{e}^k\,\partial_k$$

$$div\,\mathbb{T} = \vec{\nabla}\cdot T^{ij}[\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j] = \vec{e}_k\,\frac{\partial\left(T^{ij}[\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j]\right)}{\partial x^k}$$

Si estamos en espacio donde no varía la base de punto a punto, la base sale fuera de la derivada:

$$\boldsymbol{div}\,\mathbb{T} = \vec{e}_k\,[\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j]\,\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k} = \text{¿}\,contracción? = \frac{\boldsymbol{\partial T^{ik}}}{\boldsymbol{\partial x^k}}\,\boldsymbol{\vec{e}_i} = (\boldsymbol{div}\,\mathbb{T})_{\boldsymbol{i}}$$

Para cada fila de la matriz (tensor 2º orden) tendremos una componente del vector divergencia:

$$\begin{matrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{matrix} \qquad \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k}\,\vec{e}_i \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} \left(\dfrac{\partial T^{11}}{\partial x^1} + \dfrac{\partial T^{12}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial T^{13}}{\partial x^3}\right)\vec{e}_1 \\[2ex] \left(\dfrac{\partial T^{21}}{\partial x^1} + \dfrac{\partial T^{22}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial T^{23}}{\partial x^3}\right)\vec{e}_2 \\[2ex] \left(\dfrac{\partial T^{31}}{\partial x^1} + \dfrac{\partial T^{32}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial T^{33}}{\partial x^3}\right)\vec{e}_3 \end{matrix}$$

Si variara la base de punto a punto:

$$div\,\mathbb{T} = \vec{e}_k\,\frac{\partial\left(T^{ij}[\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j]\right)}{\partial x^k} = \vec{e}_k\,[\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j]\,\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k} + T^{ij}\vec{e}_k\,\frac{\partial[\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j]}{\partial x^k} = \frac{\boldsymbol{\partial T^{ik}}}{\boldsymbol{\partial x^k}}\,\boldsymbol{\vec{e}_i} + T^{ij}\vec{e}_k\,\frac{\partial[\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j]}{\partial x^k} = \cdots$$

Cada componente habría más términos en los que aparecerían los símbolos de Christoffel.